SESSION DE 1983

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les deux parties, I et II, *sont indépendantes*

I

On considère le système différentiel :

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + e^{-t} \end{cases}$$

où x et y sont les fonctions inconnues, de la variable réelle t, à valeurs réelles.

1. Vérifier que (S) admet une solution de la forme :

$$x = \alpha\, e^{-t} \qquad y = \beta\, e^{-t}$$

où α et β sont deux réels.

2. Intégrer (S) :

   a. En formant une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'une des inconnues.

   b. En diagonalisant la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Montrer que (S) a une solution (x_0, y_0), unique, telle que :

$$x_0(0) = y_0(0) = 0.$$

Expliciter $x_0(t)$ et $y_0(t)$ pour tout t, à l'aide de fonctions à valeurs réelles.

4. Soient :

   A un plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormé Oxy,

   C la partie de A décrite par le point M de coordonnées $(x_0(t), y_0(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$,

   C_0 la partie de C décrite par M lorsque t décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.

   a. Construire C_0. On donnera des valeurs décimales approchées, avec une incertitude absolue inférieure à 10^{-3}, des coordonnées des points remarquables de C_0. On prendra, sur chaque axe, une unité de longueur égale à 50 cm.

   b. Par quelles transformations géométriques simples peut-on déduire C de C_0?

II

1. A tout entier n, positif ou nul, on associe l'équation différentielle :

$$(E_n)\qquad y'' + (2n + 1 - x^2)\, y = 0$$

où y est la fonction inconnue, à valeurs réelles, de la variable réelle x.

   a. Former l'équation différentielle (F_n) vérifiée par :

$$Y = e^{\frac{x^2}{2}}\, y.$$

   b. Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ une série entière, dont les coefficients a_k sont réels, et dont le rayon de convergence ρ est strictement positif.

   A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients a_k pour que la somme de la série soit une solution de (F_n) sur l'intervalle $]-\rho, +\rho[$?

   c. En déduire que (F_n) a, parmi ses solutions, des fonctions polynômes de degré n.

   On désigne par H_n celle dont le terme de degré maximum est $2^n x^n$ (on ne demande pas d'expliciter les coefficients de H_n).
   (E_n) a donc, sur $\mathbb{R}$, la solution :

$$y_n = e^{-\frac{x^2}{2}}\, H_n.$$

.../...

On admettra que, de même, l'équation :

$$z'' - (2n + 1 + x^2)\, z = 0$$

a, sur $\mathbb{R}$, des solutions de la forme :

$$z_n = e^{\frac{x^2}{2}} K_n$$

où K_n est une fonction polynôme, de degré n.

2. *a.* Montrer que, pour $n \geqslant 1$, le polynôme H_n', dérivé de H_n, est une solution de (F_{n-1}).

b. En déduire :

— pour $n \geqslant 1$, l'expression de H_{n-1} en fonction de H_n' ;

— pour $n \geqslant 2$, une relation entre H_n, H_{n-1} et H_{n-2}.

3. On suppose, uniquement dans cette question 3, que $n = 1$.

a. En introduisant la fonction inconnue T telle que :

$$y = y_1 T$$

exprimer les solutions de (E_1) sur l'ensemble des réels strictement positifs à l'aide de la fonction I définie par :

$$I(x) = \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt$$

b. En déduire que toute solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ tend vers 0, $+\infty$, ou $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On pourra établir d'abord la minoration suivante, valable pour $x \geqslant \frac{4}{3}$:

$$I(x) \geqslant \frac{1}{4x}\, e^{\frac{9x^2}{16}}.$$

4. Soient :

D la partie de $\mathbb{R}^2$ formée par les points (u, v) tels que $u > 0$ et $v > 0$, φ l'application de D dans $\mathbb{R}^2$ qui fait correspondre au point (u, v) le point (x, y) tel que :

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad y = uv\ .$$

a. Comparer les modules et les arguments des nombres complexes :

$$z = x + iy \qquad \text{et} \qquad t = u + iv$$

Définir $D_1 = \varphi(D)$ et montrer que φ est une bijection de D sur D_1.

b. On donne l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f \tag{1}$$

où f est une fonction inconnue, de classe C^2, définie sur D_1.

Former l'équation (2) vérifiée par :

$$F = f \circ \varphi$$

c. A quelle condition doivent satisfaire les fonctions A et B, définies sur l'ensemble des réels strictement positifs, de classe C^2, pour que la fonction F définie sur D par :

$$F(u, v) = A(u).B(v)$$

soit une solution de (2) ?

En déduire, à l'aide des fonctions y_n et z_n définies à la question 1, des solutions de (1).